**4. Условные вероятности, формула полной вероятности,**

**формула Байеса**

Когда рассматриваются одновременно несколько разных событий, то очень часто обнаруживается некоторые зависимости между ними: тот факт, что наступило событие *B*, существенно влияет на вероятность наступления события *A*.

**Пример 4.1**. Из 30 билетов студент выучил билеты с 1 по 5 и с 26 по 30. Придя на экзамен, он обнаружил, что остались билеты с 1 по 20. Какова вероятность удачи (то есть, попадет знакомый билет)?

Обозначим событие , а через *B* обозначим событие *B* = , – множество всех билетов. Предполагая, что билеты перемешаны случайным образом, и *B* можно считать случайными событиями.

В исходном состоянии (все билеты на столе) вероятность события *A* равна

аналогично,

Если достоверно известно, что наступило событие *B*, то формула для вычисления вероятности должна измениться, поскольку учитывать надо только те элементарные исходы, которые входят в событие *B*. Отметим временно эту новую формулу значком события *B*, чтобы подчеркнуть, что теперь она определяется наступившим событием *B*:

Эту вероятность, имеющую смысл вероятности при условии, что известно о наступлении события *B*, можно переписать по-другому:

Теперь понятно, как следует определить условную вероятность.

**Определение**. Условной вероятностью события *A* при условии события *B* называется

(предполагаем, что событие *B* имеет положительную вероятность).

**Пример 4.2**. В ящике находятся 8 белых и 4 черных шара. Из ящика случайным образом извлекаем один шар. Обозначим *A* событие, состоящее в том, что извлеченный шар белый, тогда

Предположим теперь, что сначала из ящика извлекается и удаляется шар, а затем извлекаем шар. Какова теперь вероятность того, что этот второй шар белый? Естественно, эта вероятность завит от того, какого цвета был удаленный шар. Обозначим два возможных варианта: *B* = {удален белый шар}, *С* = {удален черный шар}, тогда

Простой пример, чтобы показать, что условная вероятность это не часть вероятности – она может быть как меньше, так и больше исходной вероятности события.

**Упражнение**. Показать, что при фиксированном условии *B* условная вероятность как функция события *A* обладает всеми свойствами обычной вероятности, то есть для справедливы все формулы, доказанные в предыдущем параграфе для *P(A).*

Переписав определение условной вероятности в виде:

,

получаем так называемую формулу умножения вероятностей.

С ее помощью можно по-другому вычислить вероятности из **Примера 1.7**. Событие *A* (вынуты два белых шара) можно представить в виде совместного наступления двух событий: сначала вынимаем один шар, он оказывается белым (событие ), потом вынимаем еще один шар, он белый (событие ), тогда и по формуле умножения вероятностей,

Событие *C* (вынуты два шара разного цвета) можно представить в виде

тогда

С помощью условной вероятности можно, например, понять, как выглядит статистическое описание системы ”без памяти”. Представим себе систему, где в случайные моменты времени происходят некоторые события, а нас интересуют вероятности вида , где τ обозначает время ожидания следующего события, а *t* – заданное число. То есть, мы хотим иметь возможность вычислять вероятности того, что следующего события придется ждать не меньше, чем *t* единиц времени (например, *t* секунд). Предположим, эта гипотетическая система ведет себя следующим образом: если мы уже ждали не менее *s* секунд, то вероятность того, что придется ждать еще *t* секунд, не зависит от этого *s*. Мы предполагаем, что для любого *t* событие является случайным событием, поэтому на языке условных вероятностей это свойство отсутствия памяти выглядит так:

но

следовательно,

Обозначим , тогда для функции мы получили уравнение

которое имеет единственное решение , λ – некоторое положительное число. Если предположить, что дифференцируема, то решение получить несложно.

Действительно, из функционального уравнения ( ) получаем

очевидно, , поэтому при переходе к пределу s выражение справа в скобках стремится к производной , ее обозначим и получаем дифференциальное уравнение для нашей функции,

Оно имеет решение (, так как ), тогда , но при t функция *G* стремится к 0, а потому константа *a* должна быть отрицательной, . Конструкция системы ”без памяти” применяется к моделированию таких процессов как радиоактивный распад атомных ядер, распад словарного состава языка и т.д.

**Определение**. Набор случайных событий назовем полной системой событий, если события попарно несовместны, и в сумме составляют достоверное событие, .

Заметим, что из определения следует, .

**Теорема 4.1.** (формула полной вероятности и формула Байеса). Пусть *A* – некоторое событие, – полная система событий. Тогда справедлива формула полной вероятности

и формула Байеса

***Доказательство***. Поскольку – полная система событий, то

)

причем справа – сумма несовместных событий, так что в силу аддитивности вероятности,

), подставляя сюда выражение для совместной вероятности

получаем формулу полной вероятности.

Для вывода формулы Байеса отметим, что формулу для совместной вероятности можно равным образом записать так:

выразим из второго равенства

и подставив сюда из формулы полной вероятности, получим формулу Байеса.

**Пример 4.2.** В первом ящике находятся 5 белых и 3 черных шара, во втором – 2 белых и 4 черных. Из первого ящика во второй переносятся два шара, затем из второго вынимается шар. С какой вероятностью этот шар будет белым? При условии, что этот шар оказался белым, какова вероятность того, что были перенесены два шара разного цвета?

Обозначим:

эти события составляют полную группу. Найдем их вероятности:

Первые две вероятности вычислены непосредственно согласно определению классической вероятности, а третья с применением формулы умножения вероятностей. Легко проверить условие нормировки: .

Для события составим условные вероятности:

по формуле полной вероятности,

=

Ответ на второй вопрос дает формула Байеса:

Таким же образом можно найти , .

**Пример 4.3.** Задача о разорении. Рассмотрим пример применения формулы полной вероятности к анализу процессов.

На одном шаге игры с вероятностью ½ игрок получает выигрыш 1 и с вероятностью ½ проигрыш -1. Начальный капитал игрока обозначим *X*. Правила игры: игра заканчивается, если *X* = 0 (разорение), или *X* = *S* (победа), здесь *S >* *X*. Найти вероятность разорения игрока.

Обозначим *A* событие, заключающееся в разорении игрока при начальной сумме его капитала *X,* через обозначим вероятность такого исхода, которая является, естественно, некоторой функцией начального капитала. Пусть событие *B* заключается в том, что на первом шаге имел место выигрыш, тогда

подставив эти значения в формулу полной вероятности,

получим уравнение

к которому следует добавить естественные граничные условия

Уравнение для функции *f* можно переписать в виде

это есть уравнение с постоянными приращениями, а значит, функция имеет вид

константы находим из граничных условий,

и получаем решение:

**Пример 4.4.** В ящике находятся *n* белых и черных шаров. Сколько шаров того и иного цвета неизвестно, есть основания предполагать, что все сочетания цветов равновероятны. В ящик опускаем белый шар, затем случайным образом вынимаем из него один шар. С какой вероятностью этот шар будет белым?

Обозначим (*i* = 0,1,…, *n*), *A* = {вынут белый шар}. Составляем формулу полной вероятности:

По формуле Байеса найдем вероятности

Обратите внимание, как изменились вероятности событий . Вначале эти вероятности одинаковы, но после того как был произведен эксперимент и наступило событие *A*, вероятности приняли новые значения. Следовательно, формула Байеса позволяет учесть результат опыта при пересчете вероятностей событий. Исходные вероятности принято называть априорными (известными заранее, до опыта), а вероятности – апостериорными, после эксперимента.

Решите эту задачу для события *B* = {вынут черный шар} = .